

УДК 517.95

**ПРОГНОЗУВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РЕЖИМІВ РОБОТИ ШВИДКИХ
ФІЛЬТРІВ З ОДНОРІДНИМИ ПОРИСТИМИ ЗАВАНТАЖЕННЯМИ**

кандидат технічних наук, Климюк Ю. Є.

Рівненський державний гуманітарний університет, Україна, Рівне

Запропоновано просторову математичну модель для прогнозування процесу доочистки води від домішок у швидких фільтрах з однорідними пористими завантаженнями при додержанні сталої швидкості фільтрації, яка враховує зворотній вплив концентрацій компонент багатоконпонентних домішок, адсорбованих на зернах завантаження, на активну пористість. У моделі прийнято, що конвективна складова масоперенесення й адсорбція переважають над вкладом дифузії й десорбції. Отримано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної нелінійної сингулярно-збуреної крайової задачі для просторової області, що має форму криволінійного паралелепіпеда, обмеженого двома екіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії. Запропонована модель дозволяє шляхом проведення комп'ютерних експериментів отримати оптимальні варіанти використання фільтрувальних матеріалів та збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок вибору їх форми.

Ключові слова: математична модель, процес доочистки води, багатоконпонентна домішка, швидкий фільтр, пористе завантаження, сингулярно-збурена задача, просторова область.

PhD in Technical Sciences, Klimjuk Ju. Ye. Prediction of optimal modes of operation of rapid filters with homogeneous porous loads / Rivne State University of Humanities, Ukraine, Rivne

A spatial mathematical model to predict the process of water purification from impurities in rapid filters with homogeneous porous loads subject to constant rate filtration, which takes into account the reverse impact of component concentrations of multi-component impurities, adsorbed on the grains load, on the active porosity, is proposed. In the model assumed that the convective component mass of transfer and adsorption prevail over the contribution of the diffusion and desorption. The algorithm for numerically-asymptotic approximation of the solution of the corresponding nonlinear singular-perturbed boundary problem for the spatial area, which a having the shape of a curvilinear parallelepiped, bounded two equipotential surfaces and four surfaces of the flow, is developed. The proposed model allows by conducting computer experiments to obtain optimal use of the filtering materials and the increase in the length work filters due to the choice of their form.

Key words: mathematical model, process of water purification, multi-component impurity, rapid filter, porous load, singular-perturbed problem, spatial area.

Вступ. Підземні води є багатокомпонентною динамічною системою, до складу якої входять гази, мінеральні й органічні речовини, що знаходяться в розчиненому, колоїдному і завислому станах, а також мікроорганізми. Зараз прісні підземні води широко використовуються для водопостачання, зрошення земельних угідь та інших видів господарської діяльності. Видалення завислих у воді домішок досягається шляхом її відстоювання і фільтрування, для якого використовуються швидкі фільтри із пористими завантаженнями [1]. Процеси адсорбції і десорбції домішок залежать від багатьох факторів: швидкості фільтрації, властивостей фільтруючих матеріалів, реагентів

тощо. Зростаюча вартість фільтруючих матеріалів вимагає проведення досліджень для їх більш якісного використання.

Розробкою теоретичних основ доочистки рідин від домішок шляхом їх фільтрування через пористі завантаження та подальшим її вдосконаленням займалося чимало вітчизняних і зарубіжних вчених [1, 2]. В якості математичної моделі процесу доочистки рідини від домішок вітчизняними дослідниками найчастіше використовується модель Д.М. Мінца при сталій швидкості фільтрації або деяка її модифікація (вдосконалена модель). У [3] запропоновано просторове узагальнення математичної моделі Д.М. Мінца, яка є більш ефективною для проведення теоретичних досліджень, націлених на оптимізацію параметрів процесу фільтрування (часу захисної дії завантаження, розмірів фільтра тощо). У [4] вона вдосконалена шляхом введення додаткового рівняння для визначення зміни активної пористості завантаження вздовж висоти фільтру. Математичні моделі у [3, 4] описані нелінійними сингулярно-збуреними крайовими задачами (у моделях прийнято, що конвективні складові масоперенесення й адсорбції переважають над вкладом дифузії й десорбції) і розв'язуються з використанням числово-асимптотичних методів. При цьому суттєвим є перехід від вихідної задачі для складної конфігурації криволінійної області (обмеженої поверхнями течії й екіпотенціальними поверхнями) до задачі для відповідної канонічної області комплексного потенціалу, що має вигляд прямокутного паралелепіпеда. Але у [3, 4] враховувалася лише дифузія домішок у воді, так як коефіцієнт дифузії домішок у фільтраційній течії значно більший за коефіцієнт домішок в осаді, адсорбованому на зернах завантаження. Однак з часом спостерігається значне зростання концентрації домішок в осаді і відповідний доданок стає суттєвим. Крім того, варто враховувати багатоконпонентність домішок.

Мета роботи. Сформувати математичну модельну задачу для прогнозування процесу доочистки води від багатоконпонентних домішок у швидких фільтрах з однорідними пористими завантаженнями при додержанні сталої швидкості фільтрації, яка дозволяла б шляхом проведення комп'ютерних експериментів отримати оптимальні варіанти використання фільтрувальних матеріалів та збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок вибору їх форми. Отримати алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної нелінійної сингулярно-збуреної крайової задачі.

Постановка задачі. Для модельної області $G = G_z \times (0, \infty)$ ($z = (x, y, z)$), $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ – однозв'язний криволінійний паралелепіпед, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, двома екіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z: f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z: f_2(x, y, z) = 0\}$ і чотирма поверхнями течії $ADD_*A_* = \{z: f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{z: f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z: f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: f_6(x, y, z) = 0\}$ (рис. 1 а), розглянемо модельну задачу, описану системою рівнянь:

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \text{div } \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} (\sigma \cdot C_j)'_t = \text{div}(D_j \cdot \text{grad } C_j) - \vec{v} \cdot \text{grad } C_j - \sum_{k=1}^m a_{j,k} \cdot C_j + \\ + \sum_{k=1}^m a_{k,j} \cdot C_k - \alpha_j \cdot C_j + \beta_j \cdot U_j, (\sigma \cdot C_j)'_t = \text{div}(D_j^* \cdot \text{grad } U_j) - \\ - \sum_{k=1}^m a_{j,k}^* \cdot U_j + \sum_{k=1}^m a_{k,j}^* \cdot U_k + \alpha_j \cdot C_j - \beta_j \cdot U_j, \sigma'_t = - \sum_{k=1}^m \gamma_j \cdot U_j \quad (j = \overline{1, m}) \end{cases} \quad (2)$$

за крайових умов:

$$\Phi|_{ABB_*A_*} = \Phi_*, \quad \Phi|_{CDD_*C_*} = \Phi^*, \quad \Phi'_n|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \quad (3)$$

$$C_j|_{ABB_*A_*} = c_j^*, \quad C'_j|_{CDD_*C_*} = 0, \quad C'_j|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}),$$

$$U_j|_{ABB_*A_*} = u_j^*, \quad U'_j|_{CDD_*C_*} = 0, \quad U'_j|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}) \quad (4)$$

і початкових умов:

$$C_j|_{t=0} = c_j^0, \quad U_j|_{t=0} = u_j^0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad \sigma|_{t=0} = \sigma_0^0, \quad (5)$$

де $\varphi = \varphi(x, y, z)$ і $\vec{v} = \vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації, $0 = \varphi_* < \varphi < \varphi^* < \infty$, $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > 0$, κ – коефіцієнт фільтрації, $\kappa > 0$, \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної поверхні; $C_j = C_j(x, y, z, t)$ і $U_j = U_j(x, y, z, t)$ – відповідно концентрації j -тої компоненти багатоконпонентної домішки у фільтраційній течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження; $\sigma = \sigma(x, y, z, t)$ – активна пористість, D_j – власний коефіцієнт дифузії j -тої компоненти багатоконпонентної домішки у фільтраційній течії, $D_j = \varepsilon \cdot d_j$, $d_j > 0$ ($j = \overline{1, m}$), D_j^* – власний коефіцієнт дифузії j -тої компоненти багатоконпонентної домішки в осаді, $D_j^* = \varepsilon \cdot d_j^*$, $d_j^* > 0$ ($j = \overline{1, m}$), $a_{j,k}$ і $a_{j,k}^*$ – коефіцієнти, що характеризують швидкість протікання масообмінних процесів між j -тою і k -тою компонентами багатоконпонентної домішки відповідно у фільтраційній течії і адсорбованої на зернах завантаження, $a_{j,k} = \varepsilon \cdot \bar{a}_{j,k}$, $a_{j,k}^* = \varepsilon \cdot \bar{a}_{j,k}^*$ ($j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, m}$), α_j і β_j – коефіцієнти, що характеризують обсяги адсорбованої і десорбованої за одиницю часу j -тої компоненти багатоконпонентної домішки, $\beta_j = \varepsilon \cdot \bar{\beta}_j$ ($j = \overline{1, m}$), γ_j – коефіцієнт, що характеризує швидкість зміни активної пористості завантаження за рахунок сорбції j -тої

компоненти багатокomпонентної домішки, $\gamma_j = \varepsilon \cdot \bar{\gamma}_j$ ($j = \overline{1, m}$),
 $\bar{a}_{j,k} = \bar{a}_{j,k}(x, y, z, t)$, $\bar{a}_{j,k}^* = \bar{a}_{j,k}^*(x, y, z, t)$ ($j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, m}$), $\alpha_j = \alpha_j(x, y, z, t)$,
 $\bar{\beta}_j = \bar{\beta}_j(x, y, z, t)$ і $\bar{\gamma}_j = \bar{\gamma}_j(x, y, z, t)$ ($j = \overline{1, m}$) – неперервні обмежені функції,
 ε – малий параметр ($\varepsilon > 0$), $c_j^* = c_j^*(M, t)$, $c_j^0 = c_j^0(x, y, z)$, $u_j^* = u_j^*(M, t)$,
 $u_j^0 = u_j^0(x, y, z)$ ($j = \overline{1, m}$) і $\sigma_0^0 = \sigma_0^0(x, y, z)$ – достатньо гладкі функції,
 узгоджені між собою на ребрах області G [5], $M \in ABB_*A_*$.

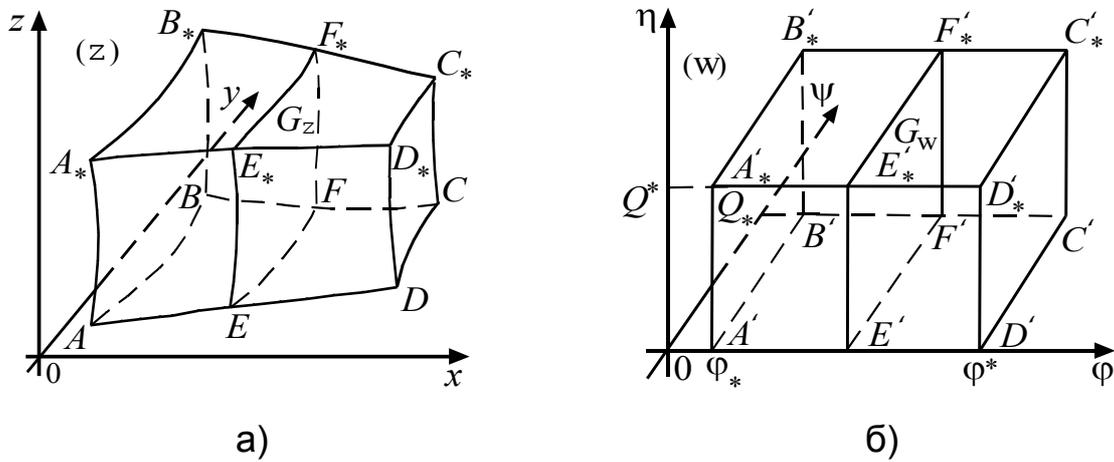


Рис. 1. Просторова область фільтрації G_z (а) та

відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

Шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$
 (просторово комплексно спряжених із функцією $\varphi(x, y, z)$) таких, що
 $\kappa \cdot \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \eta$ [6] і заміною останніх чотирьох з граничних
 умов (3) на умови: $\psi|_{ADD_*A_*} = 0$, $\psi|_{BCC_*B_*} = Q^*$, $\eta|_{ABCD} = 0$, $\eta|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^*$,
 задача (1), (3) замінюється більш загальною прямою задачею на
 знаходження просторового аналогу конформного відображення області
 G_z на відповідну область комплексного потенціалу – прямокутний
 паралелепіпед $G_w = A'B'C'D'A_*B_*C_*D_* = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q^*,$

$0 < \eta < Q^*$ }, де Q_* , Q^* – невідомі параметри, $Q = Q_* \cdot Q^* = \int_{EFF_*E_*} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds$ –

кількість рідини, що проходить через деяку екіпотенціальну поверхню EFF_*E_* області G_z (повна фільтраційна витрата).

Припустимо, що ця задача є розв’язаною [5], зокрема, знайдено поле швидкостей \vec{v} , параметри Q_* , Q^* , Q та ряд інших величин. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у рівнянні (2) та умовах (4), (5), отримаємо відповідну “дифузійну задачу” для області $G_w \times (0, \infty)$:

$$\left\{ \begin{aligned} (\tilde{\sigma} \cdot c_j)'_t &= D_j \cdot (b_1 \cdot c''_{j\varphi\varphi} + b_2 \cdot c''_{j\psi\psi} + b_3 \cdot c''_{j\eta\eta} + b_4 \cdot c'_{j\psi} + b_5 \cdot c'_{j\eta}) - \\ &- \kappa \cdot b_1 \cdot c'_{j\varphi} - \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{j,k} \cdot c_j + \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{k,j} \cdot c_k - \tilde{\alpha}_j \cdot c_j + \tilde{\beta}_j \cdot u_j, (\tilde{\sigma} \cdot u_j)'_t = \\ &= D_j^* \cdot (b_1 \cdot u''_{j\varphi\varphi} + b_2 \cdot u''_{j\psi\psi} + b_3 \cdot u''_{j\eta\eta} + b_4 \cdot u'_{j\psi} + b_5 \cdot u'_{j\eta}) - \\ &- \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{j,k}^* \cdot u_j + \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{k,j}^* \cdot u_k + \tilde{\alpha}_j \cdot c_j - \tilde{\beta}_j \cdot u_j, \tilde{\sigma}'_t = - \sum_{j=1}^m \tilde{\gamma}_j \cdot u_j \quad (j = \overline{1, m}), \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$c_j \Big|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{c}_j^*, \quad c'_{j\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0,$$

$$c'_{j\psi} \Big|_{\psi=0} = c'_{j\psi} \Big|_{\psi=Q_*} = c'_{j\eta} \Big|_{\eta=0} = c'_{j\eta} \Big|_{\eta=Q^*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}),$$

$$u_j \Big|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{u}_j^*, \quad u'_{j\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0,$$

$$u'_{j\psi} \Big|_{\psi=0} = u'_{j\psi} \Big|_{\psi=Q_*} = u'_{j\eta} \Big|_{\eta=0} = u'_{j\eta} \Big|_{\eta=Q^*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (7)$$

$$c_j \Big|_{t=0} = \tilde{c}_j^0, \quad u_j \Big|_{t=0} = \tilde{u}_j^0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad \tilde{\sigma} \Big|_{t=0} = \tilde{\sigma}_0^0, \quad (8)$$

де $c_j = c_j(\varphi, \psi, \eta, t) = C_j(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$, $u_j = u_j(\varphi, \psi, \eta, t)$,

$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{c}_j^* = \tilde{c}_j^*(\psi, \eta, t)$, $\tilde{u}_j^* = \tilde{u}_j^*(\psi, \eta, t)$, $\tilde{c}_j^0 = \tilde{c}_j^0(\varphi, \psi, \eta)$,

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_j^0 &= \tilde{u}_j^0(\varphi, \psi, \eta), \quad \tilde{\sigma}_0^0 = \tilde{\sigma}_0^0(\varphi, \psi, \eta), \quad \tilde{a}_{j,k} = \varepsilon \cdot \tilde{\tilde{a}}_{j,k}, \quad \tilde{a}_{j,k}^* = \varepsilon \cdot \tilde{\tilde{a}}_{j,k}^*, \quad \tilde{\beta}_j = \varepsilon \cdot \tilde{\tilde{\beta}}_j, \\
 \tilde{\gamma}_j &= \varepsilon \cdot \tilde{\tilde{\gamma}}_j, \quad \tilde{a}_{j,k} = \tilde{\tilde{a}}_{j,k}(\varphi, \psi, \eta, t), \quad \tilde{a}_{j,k}^* = \tilde{\tilde{a}}_{j,k}^*(\varphi, \psi, \eta, t), \quad \tilde{\alpha}_j = \tilde{\tilde{\alpha}}_j(\varphi, \psi, \eta, t), \\
 \tilde{\beta}_j &= \tilde{\tilde{\beta}}_j(\varphi, \psi, \eta, t), \quad \tilde{\gamma}_j = \tilde{\tilde{\gamma}}_j(\varphi, \psi, \eta, t), \quad \tilde{v} = \tilde{v}(\varphi, \psi, \eta), \quad b_r = b_r(\varphi, \psi, \eta) \quad (r = \overline{1,5}), \\
 b_1 &= \varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + \varphi_z'^2 = \tilde{v}^2 \cdot \kappa^{-2}, \quad b_2 = \psi_x'^2 + \psi_y'^2 + \psi_z'^2, \quad b_3 = \eta_x'^2 + \eta_y'^2 + \eta_z'^2, \\
 b_4 &= \psi_{xx}'' + \psi_{yy}'' + \psi_{zz}'', \quad b_5 = \eta_{xx}'' + \eta_{yy}'' + \eta_{zz}'' \quad [5].
 \end{aligned}$$

Розв'язання задачі. Аналогічно до [3 – 5] знайдено числово-асимптотичне наближення розв'язку задачі (6) – (8) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ у вигляді таких рядів:

$$c_j = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{j,i} + \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{P}_{j,i} + \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{P}}_{j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \left(\hat{P}_{j,i} + \hat{\tilde{P}}_{j,i} + \check{P}_{j,i} + \check{\tilde{P}}_{j,i} \right) + R_{j,n+1} \quad (j = \overline{1,m}),$$

$$u_j = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot u_{j,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{H}_{j,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{H}}_{j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \left(\hat{H}_{j,i} + \hat{\tilde{H}}_{j,i} + \check{H}_{j,i} + \check{\tilde{H}}_{j,i} \right) + \check{R}_{j,n+1}$$

$(j = \overline{1,m}),$

$$\tilde{\sigma} = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{\sigma}_i + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{h}_i + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{h}}_i + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \left(\hat{h}_i + \hat{\tilde{h}}_i + \check{h}_i + \check{\tilde{h}}_i \right) + \check{R}_{s,n+1},$$

де $c_{j,i} = c_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $u_{j,i} = u_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_i(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($j = \overline{1,m}$, $i = \overline{0,n}$) –

члени регулярних частин асимптотик, $\tilde{P}_{j,i} = \tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t)$,

$\tilde{H}_{j,i} = \tilde{H}_{j,i}(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{h}_i = \tilde{h}_i(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t)$ ($j = \overline{1,m}$, $i = \overline{0,n+1}$) – функції типу

примежового шару в околі $\varphi = \varphi_*$ (поправки на вході), $\tilde{\tilde{P}}_{j,i} = \tilde{\tilde{P}}_{j,i}(\tilde{\tilde{\phi}}, \psi, \eta, t)$,

$\tilde{\tilde{H}}_{j,i} = \tilde{\tilde{H}}_{j,i}(\tilde{\tilde{\phi}}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{h}}_i = \tilde{\tilde{h}}_i(\tilde{\tilde{\phi}}, \psi, \eta, t)$ ($j = \overline{1,m}$, $i = \overline{0,n+1}$) – функції типу

примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході),

$\hat{P}_{j,i} = \hat{P}_{j,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{H}_{j,i} = \hat{H}_{j,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{h}_i = \hat{h}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{\tilde{P}}_{j,i} = \hat{\tilde{P}}_{j,i}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$,

$\hat{\tilde{H}}_{j,i} = \hat{\tilde{H}}_{j,i}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$, $\hat{\tilde{h}}_i = \hat{\tilde{h}}_i(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$, $\check{P}_{j,i} = \check{P}_{j,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$,

$$\check{H}_{j,i} = \check{H}_{j,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \quad \check{h}_i = \check{h}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \quad \check{P}_{j,i} = \check{P}_{j,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \quad \check{H}_{j,i} = \check{H}_{j,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t),$$

$\check{h}_i = \check{h}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару

відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$ (поправки на бічних

стінках фільтру), $\tilde{\phi} = \frac{\varphi - \varphi_*}{\varepsilon}$, $\tilde{\phi} = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$, $\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\psi} = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$,

$\tilde{\eta} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги),

$R_{j,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $\check{R}_{j,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $\check{R}_{n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ($j = \overline{1, m}$) – залишкові

члени. Зокрема, для знаходження $c_{j,i}$, $u_{j,i}$, $\tilde{\sigma}_i$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, n}$)

одержано формули:

$$c_{j,0} = \begin{cases} \tilde{c}_j^*(\psi, \eta, t - \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta)) \cdot e^{-\tilde{\lambda}_{j,1}(\varphi, \psi, \eta, t)}, & t \geq \tilde{f}, \\ \tilde{c}_j^0(\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta) \cdot e^{-\tilde{\lambda}_{j,2}(\varphi, \psi, \eta, t)}, & t < \tilde{f}, \end{cases}$$

$$u_{j,0} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_0^0} \cdot \int_0^t \tilde{\alpha}_j(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) \cdot c_{j,0}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} + \tilde{u}_j^0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad \tilde{\sigma}_0 = \tilde{\sigma}_0^0 \quad (j = \overline{1, m}),$$

$$c_{j,i} = \begin{cases} e^{-\tilde{\lambda}_{j,1}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_{j,i}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}(\hat{\varphi}, \psi, \eta) - \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta) + t)}{\tilde{v}^2(\hat{\varphi}, \psi, \eta)} \cdot e^{\tilde{\lambda}_{j,1}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t)} d\hat{\varphi}, & t \geq \tilde{f}, \\ e^{-\tilde{\lambda}_{j,2}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot \int_0^t \frac{g_{j,i}(\tilde{f}^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \hat{t})}{\tilde{\sigma}_0^0(\tilde{f}^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} \cdot e^{\tilde{\lambda}_{j,2}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t})} d\hat{t}, & t < \tilde{f}, \end{cases}$$

$$u_{j,i} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_0^0} \cdot \int_0^t \tilde{g}_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t}, \quad \tilde{\sigma}_i = \int_0^t \tilde{g}_i(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}),$$

де
$$\tilde{\lambda}_{j,1}(\varphi, \psi, \eta, t) = \kappa \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{\tilde{\alpha}_j(\hat{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}(\hat{\varphi}, \psi, \eta) + t - \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta))}{\tilde{v}^2(\hat{\varphi}, \psi, \eta)} d\hat{\varphi},$$

$$\tilde{\lambda}_{j,2}(\varphi, \psi, \eta, t) = \int_0^t \frac{\tilde{\alpha}_j(\tilde{f}^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \hat{t})}{\tilde{\sigma}_0^0(\tilde{f}^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\hat{t},$$

$$g_{j,i} = I(i,1) \cdot \left(d_j \cdot (b_1 \cdot c''_{(j,i-1)\varphi\varphi} + b_2 \cdot c''_{(j,i-1)\psi\psi} + b_3 \cdot c''_{(j,i-1)\eta\eta} + b_4 \cdot c'_{(j,i-1)\psi} + b_5 \cdot c'_{(j,i-1)\eta}) + \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{j,k} \cdot c_{j,i-1} - \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{k,j} \cdot c_{k,i-1} + \tilde{\beta}_j \cdot u_{j,i-1} - \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_l \cdot c'_{(j,i-l)t} - \tilde{\sigma}'_{lt} \cdot c_{j,i-l}) \right),$$

$$\tilde{g}_{j,i} = \tilde{\alpha}_j \cdot c_{j,i} +$$

$$+ I(i,1) \cdot \left(d_j^* \cdot (b_1 \cdot u''_{(j,i-1)\varphi\varphi} + b_2 \cdot u''_{(j,i-1)\psi\psi} + b_3 \cdot u''_{(j,i-1)\eta\eta} + b_4 \cdot u'_{(j,i-1)\psi} + b_5 \cdot u'_{(j,i-1)\eta}) + \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{j,k}^* \cdot u_{j,i-1} - \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{k,j}^* \cdot u_{k,i-1} - \tilde{\beta}_j \cdot u_{j,i-1} + \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_l \cdot u'_{(j,i-l)t} + \tilde{\sigma}'_{lt} \cdot u_{j,i-l}) \right),$$

$$\tilde{g}_i = -I(i,1) \times \times \sum_{j=1}^m \tilde{\gamma}_j \cdot u_{j,i-1}, \quad \tilde{f} = \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta) = \kappa \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{\tilde{\sigma}_0^0(\hat{\varphi}, \psi, \eta)}{\tilde{v}^2(\hat{\varphi}, \psi, \eta)} d\hat{\varphi} \quad - \quad \text{час}$$

проходження відповідною частинкою шляху від точки $(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) \in ABB_*A_*$ до точки

$(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_z$ вздовж відповідної лінії течії, \tilde{f}^{-1} –

функція, обернена відповідно до \tilde{f} відносно змінної φ , $I(a,b) = \begin{cases} 1, & a \geq b, \\ 0, & a < b. \end{cases}$

Висновки. Сформовано просторову математичну модель процесу доочистки води від багатокомпонентних домішок у швидких фільтрах з однорідними пористими завантаженнями, яка враховує зворотній вплив концентрацій домішок, адсорбованих на зернах завантаження, на активну пористість. Отримана модель дозволяє шляхом проведення комп'ютерних експериментів більш точно у порівнянні з [3, 4] (за рахунок врахування багатокомпонентності домішки і дифузійної складової в осаді) спрогнозувати оптимальні варіанти використання фільтрувальних матеріалів та збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок підбору їх форми.

Література:

1. Орлов В.О. Водоочисні фільтри із зернистою засипкою / В. О. Орлов. – Рівне: НУВГП, 2005. – 163 с.
2. Минц Д.М. Теоретические основы технологии очистки воды / Д.М. Минц. – М.: Стройиздат, 1964. – 156 с.
3. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових модельних задач процесу фільтрування / А.Я. Бомба, Ю.Є. Климюк, А.П. Сафоник, В.М. Сівак // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 11. – С. 29–39.
4. Климюк Ю.Є. Моделювання процесу доочистки води від залишкових катіонів алюмінію фільтруванням через аніоноактивні завантаження із врахуванням зміни фільтраційних властивостей середовища / Ю.Є. Климюк, В.М. Сівак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 7 (16). – Рівне: РДГУ, 2010. – С. 93–109.
5. Бомба А.Я. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія: монографія / А.Я. Бомба, Ю.Є. Климюк. – Рівне: ТзОВ фірма «Ассоль», 2014. – 273 с.
6. Рауз Х. Механика жидкости / Х. Рауз. – М.: Стройиздат. – 1967. – 390 с.

References:

1. Orlov V.O. Vodoochisni fil'tri iz zernistoju zasipkoju / V.O. Orlov. – Rivne: NUVGP, 2005. – 163 s.
2. Minc D.M. Teoreticheskie osnovy tehnologii ochistki vody / D.M. Minc. – M.: Strojizdat, 1964. – 156 s.
3. Chislovo-asimptotichne nablizhennja rozv'jazkiv prostоровih model'nih zadach procesu fil'truvannja / A.Ja. Bomba, Ju.Je. Klimjuk, A.P. Safonik,

V.M. Sivak // *Fiziko-matematichne modeljuvannja ta informacijni tehnologii.* – 2010. – Vip. 11. – S. 29–39.

4. Klimjuk Ju.Je. *Modeljuvannja procesu doochistki vodi vid zalishkovih kationiv aljuminiju fil'truvannjam cherez anionoaktivni zavantazhennja iz vrahuvannjam zmini fil'tracijnih vlastivostej seredovishha* / Ju.Je. Klimjuk, V.M. Sivak // *Volins'kij matematichnij visnik. Serija prikladna matematika.* – Vip. 7 (16). – Rivne: RDGU, 2010. – S. 93–109.

5. Bomba A.Ja. *Matematichne modeljuvannja prostorovih singuljarno-zburenih procesiv tipu fil'tracija-konvekcija-difuzija: monografija* / A.Ja. Bomba, Ju.Je. Klimjuk. – Rivne: TzOV firma «Assol'», 2014.–273 s.

6. Rauz H. *Mehanika zhidkosti* / H. Rauz. – M.: Strojizdat. – 1967.– 390 s.