DOI 10.26886/2414-634X.8(44)2020.2

UDC 536.24:532.5:536.27

NUMERICAL AND ANALYTICAL SOLUTION OF THE HEAT EXCHANGE PROBLEM

Y. Chovniuk, PhD of Technical Sciences

https://orcid.org/0000-0002-0608-0203

e-mail: ychovnyuk@ukr.net

National University Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

A. Moskvitina

https://orcid.org/0000-0003-3352-0646

e-mail: moskvitina.as@knuba.edu.ua

Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine

In this work, a numerical-analytical analysis of the solution of the conjugate problem is carried out, which most fully takes into account the actual conditions of heat transfer in tubular heat exchangers under the condition of a laminar flow of the working fluid in pipes and channels. When solving the conjugate problem, the role of the non-Newtonian properties of the indicated fluid is taken into account. The obtained quantitative estimates of the errors, which are due to the fact that the conjugacy of the problem and the indication on the wall of the boundary conditions of the third kind were not taken into account. The given conditions and criteria, the fulfillment of which reduces the problem of heat transfer under boundary conditions of the third kind to a problem under boundary conditions of the first kind.

Key words: heat exchange problem, pipe with a round cross section, boundary conditions of the third and first kind, non-Newtonian fluid, heat exchangers, heat transfer.

кандидат технічних наук, Човнюк Ю. В, Москвітіна А. С., Чисельно-аналітичний розв'язок задачі теплообміну/ Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ, Україна; Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна.

У роботі проведений чисельно-аналітичний аналіз розв'язку спряженої задачі, яка найбільш повно враховує дійсні умови теплообміну у трубчастих теплообмінних апаратах за умови ламінарної течії робочої рідини у трубах і каналах. При розв'язку спряженої задачі врахована роль неньютонівських властивостей вказаної рідини. Отримані кількісні оцінки похибок, обумовлених неврахуванням спряженості задачі й заданням на стінці граничних умов третього роду. Наведені умови та критерії, виконання яких зводить задачу про теплообмін за граничних умов третього роду до задачі за граничних умов першого роду.

Ключові слова: задача обміну тепла , труба з круглим поперечним перерізом, граничні умови третього та першого роду, неньютонівська рідина, теплообмінники, теплообмін.

Вступ. У останні роки значна увага приділяється розв'язку спряжених задач, які найбільш повно враховують дійсні умови теплообміну у трубчастих теплообмінних апаратах. Спряженим задачам теплообміну за ламінарної течії рідини у трубах й каналах, які можуть бути використані для оцінки ролі цього фактору, присвячені роботи [1, с.88; 2,с.32; 3, с. 1046]. Роль неньютонівських властивостей при розв'язуванні спряжених задач дослідження у монографії [4, с. 102]. Наявні у цих роботах дані дозволяють кількісно оцінити похибки, обумовлені неврахуванням спряженості задачі й заданням на стінці граничних умов третього роду. Останнє означає, що щільність теплового потоку приймається пропорціональна різниці температур зовнішньої поверхні стінки T_{w1} й середовища $T_{сер}$:

$$q_w = \alpha_1 \cdot (T_{w1} - T_{сер}); \quad (1)$$

де,α_1- коефіцієнт тепловіддачі від зовнішньої поверхні стінки труби у навколишнє середовище.

Величини α_1 та $T_{сер}$ вважаються заданими, у загальному випадку вони є функціями координат на поверхні труби. Задання таких функцій не змінює принципової сторони питання, а лише ускладнює обчислення. Для високов'язких рідин у зв'язку з малими градієнтами температур вздовж потоку доцільно ввести ще одне припущення: поле температур у стінці труби одновимірне; тобто перенесення теплоти здійснюється лише вздовж нормалі до її поверхні, а перенесення теплоти вздовж стінки замале. Задання граничних умов третього роду на внутрішній стінці труби рівносильне заміні розв'язку спряженої задачі розв'язком задачі теплообміну тільки у рідині.

Слід оцінити можливі помилки такої заміни. Так, у роботі А.В. Ликова [1, с.95] для оцінки умов спряження введене число Брюна Br', причому при $Br' \leq 0,1$ задачу рекомендовано розв'язувати без урахування спряження. При течії у трубі число Брюна можна наближено оцінити як:

$$Br' - \frac{\lambda_p}{\lambda_{ст}} \cdot \frac{\delta_{ст}}{d} \cdot Pe^{0,33} \quad (2)$$

де, δ_{cm} - товщина стінки труби, d – її діаметр, $\lambda_{p,cm}$ - коефіцієнт теплопровідності відповідно рідини, стінки, Pe - критерій Пекле.

При звичайних для труб величинах $\lambda_p / \lambda_{cm} = \bar{\lambda}$ та δ_{cm} / d число $Br' \leq 10^{-2}$.

У роботі [2, с.34] спряжена для степеневої рідини (реологічна модель Оствальда-де Віля) задача розв'язана при умові, що на зовнішній стінці труби температура змінюється за довільним законом. У якості критерію спряження введений параметр:

$$K_s = \bar{\lambda}/lnR_1 \quad (3)$$

де, R_1 - відношення зовнішнього й внутрішнього радіусів труби.

При $K_s \to \infty$ задача зводиться до граничних умов першого роду за змінної по довжині температури стінки. Розраховані для цього випадку дані добре узгоджуються з відомими у літературі. Оцінка значення K_s для умов теплообміну при ламінарній течії у трубах вказує на те, що $K_s > 0{,}01$. При такому значенні K_s відхилення у числах Нуссельта (*Nu*) завдяки тому, що не враховані умови спряження складають менше 1% на початковій ділянці труби. У роботі [4, с.143] фактори, які впливають на степінь спряженості задач, зведені у таблицю, з якої видно, що для неньютонівських рідин, які проявляють псевдопластичні властивості, роль умов спряження менше, ніж для ньютонівських. Кількісна оцінка умов спряження детально розглянута для умов теплообміну між двома рідинами, які розділені тонкою пластиною. Вона дозволяє обчислити відносну похибку у величині локальної щільності теплового потоку, обумовлену тим, що не враховується спряженість задачі. Якщо використати цю оцінку, можна прийти до висновку, що для рідин з $n = \frac{1}{m} < 1$ (де *m* – показник нелінійності у моделі Балклі-Гершеля) у самих несприятливих з точки зору величини похибки ситуаціях остання не буде перевищувати 5%, причому для неньютонівських рідин вона буде ще меншою. У роботах [3, с.1048] досліджені спряжені задачі для течії нелінійно-в'язкопластичних рідин у плоскопаралельних каналах. З наведених оцінок, якщо розповсюдити їх на круглі труби, випливає, що похибки, які виникають при неврахуванні спряженості знаходяться у межах точності чисельних розрахунків.

За граничних умов третього роду існує доволі мало робіт. У [4, с.156] наближеним інтегральним методом для цих умов розв'язана задача теплообміну із урахуванням дисипації енергії руху. Зазначений суттєвий вплив числа *Bi*, введеного у якості параметру, що характеризує умови на границі, на локальне значення *Nu.* Більш повно, включаючи й початкову гідродинамічну ділянку, задача для ньютонівських рідин розглянута у роботі [5, с. 947]. Розв'язок гідродинамічної задачі отриманий методом Гальоркіна-Канторовича, а теплової – чисельним методом. З наведених даних випливає, що роль гідродинамічної ділянки дещо підвищується зі зменшенням числа *Bi* (критерію) Біо. Так, відношення числа Нуссельта з профілем швидкості, що розвивається, до аналітичної величини з розвинутим профілем швидкості для *Bi* = 100 (що практично співпадає з *Bi*→∞) складає 1,15 при $\frac{1}{Pe}\cdot\frac{Z}{d} = 10^{-3}$, а для *Bi* = 2 воно дорівнює 1,25. Дані відносяться до числа *Pr* = 10. (Зазначимо, що вісь Oz співпадає з віссю труби). Зі збільшенням $\frac{1}{Pe}\cdot\frac{Z}{d}$, а також чисел Прандтля (*Pr*) роль початкової гідродинамічної ділянки знижується і при *Pr* ≥100 та $\frac{1}{Pe}\cdot\frac{z}{d} > 10^{-3}$ у межах точності чисельних розрахунків стає несуттєвою, що аналогічно першій граничній задачі.

Вплив дисипації механічної енергії на теплообмін для ньютонівської рідини вивчений у роботі [6, с.187]. Задача була розв'язана звичайним методом розділення змінних, три власних значення були табульовані, а також коефіцієнти розкладу для *Bi*, рівного відповідно, 40,4 та 1. З даних щодо граничних чисел Нуссельта випливає, що останні змінюються від нуля при *Bi* = 0 до 9,6 при Bi→∞ ; при цьому місцеве число *Nu*, розраховане по коефіцієнту тепловіддачі на стінці *α,* дорівнює 9,6 незалежно від числа *Bi*. На основі аналізу отриманих даних зазначена фізично очевидна обставина, що при зменшенні *Bi* роль дисипації енергії зростає. Результати розв'язків задачі теплообміну для неньютонівських рідин із урахуванням дисипації енергії руху, як відомо, відсутні [6, с.162].

Мета даної роботи полягає у визначенні аналітичним шляхом (місцевого) загального числа Нуссельта як функції звичайного місцевого числа *Nu* й критерію Біо (*Bi*), а також обґрунтуванні чисельного методу розв'язку та отриманих результатів для задачі теплообміну при граничних умовах третього роду. При цьому встановлена чисельна оцінка значення *Bi*, за якою задача з граничними умовами третього роду може бути зведена до задачі з граничними умовами першого роду.

Виклад основного змісту дослідження. Відомо, що число Біо:

$$Bi - K' \cdot \frac{d}{\lambda}, \tag{4}$$

де, $(K')^{-1} = \frac{d}{2\lambda_{ст}} \cdot \ln\left(\frac{d_1}{d}\right) + \frac{d}{\alpha_1 \cdot d_1}$; K' - місцевий коефіцієнт теплопередачі від внутрішньої поверхні стінки до оточуючого середовища; λ, $\lambda_{ст}$ - коефіцієнт теплопровідності оточуючого середовища та матеріалу стінки, відповідно; α_1- коефіцієнт тепловіддачі зовнішньої поверхні труби; d й d_1 - внутрішній та зовнішній діаметри труби.

Число *Bi* й температура оточуючого середовища, які безпосередньо входять у безрозмірні змінні задачі теплообміну, вважаються заданими.

Загальне число Нуссельта (місцеве значення) $Nu_k = K \cdot d/\lambda$ пов'язане зі звичайним місцевим числом Нуссельта $Nu_\alpha = \alpha \cdot d/\lambda$ відомим співвідношенням:

$$\frac{1}{Nu_k} = \frac{1}{Nu_\alpha} + \frac{1}{Bi} \tag{5}$$

У цьому випадку маємо:

$$Nu_k = Nu_\alpha \cdot Bi/(Nu_\alpha + Bi), \tag{6}$$

тобто, завжди $Nu_k < Nu_\alpha$, а $\frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{K'}$, де *K* – місцевий коефіцієнт теплопередачі від рідини, яка протікає по трубі, до оточуючого середовища. Формула (6) є справедливою й по відношенню до середніх значень чисел $\overline{Nu}$. Якщо Bi→∞ , тоді $Nu_k = Nu_\alpha$ і задача про теплообмін при граничних умовах третього роду зводиться до задачі при граничних умовах першого роду; якщо $Bi = 0$, що відповідає теплоізольованій стінці, то $Nu_k = 0$, а Nu_α - скінчена величина.

Відомі різноманітні методи розв'язку задачі теплообміну при граничних умовах третього роду. У зв'язку із громіздкістю розв'язку методом розділення змінних (власні значення й власні функції у задачі Штурма-Лаувілля у цьому випадку залежать від числа *Bi*) отримали розповсюдження чисельні методи [5, с.944]. Для неньютонівських рідин ця обставина має особливе значення оскільки власні значення й усі параметри задачі Штурма-Лаувілля є, крім того, функцією радіусу струмневої течії й показника нелінійності ($n=1/m$), який присутній у моделі (реологічній) Балклі-Гершеля. З цієї причини розв'язок задачі теплообміну за граничних умов третього роду, як правило, не будується, а наступний аналіз заснований на результатах чисельного розв'язку наданих у роботах [7, с. 98; 8, с.74]. Метод чисельного розв'язку детально розглянутий також у [6, с.116].

На рис.1 здійснена оцінка точності чисельного методу у порівнянні з аналітичним [8, с.75], який використовувався при розв'язуванні задач теплообміну для граничних умов першого й третього роду. Результати розрахунків температурного поля на ПЕОМ співпадають у межах відхилень, не перевищуючи (2…3)%, що вказує на високу точність чисельного методу.

На рис. 1 введені позначення: T – температура рідини, T_w- температура стінки, r_w - радіус стінки, r – радіус (поточний), який відраховується від вісі Oz циліндричної труби, m – показник нелінійності моделі Балклі-Гершеля, $\alpha=r_\alpha/r_w$ - безрозмірний радіус ядра (r_α) струмневої течії; q_w - тепловий потік через стінку труби.

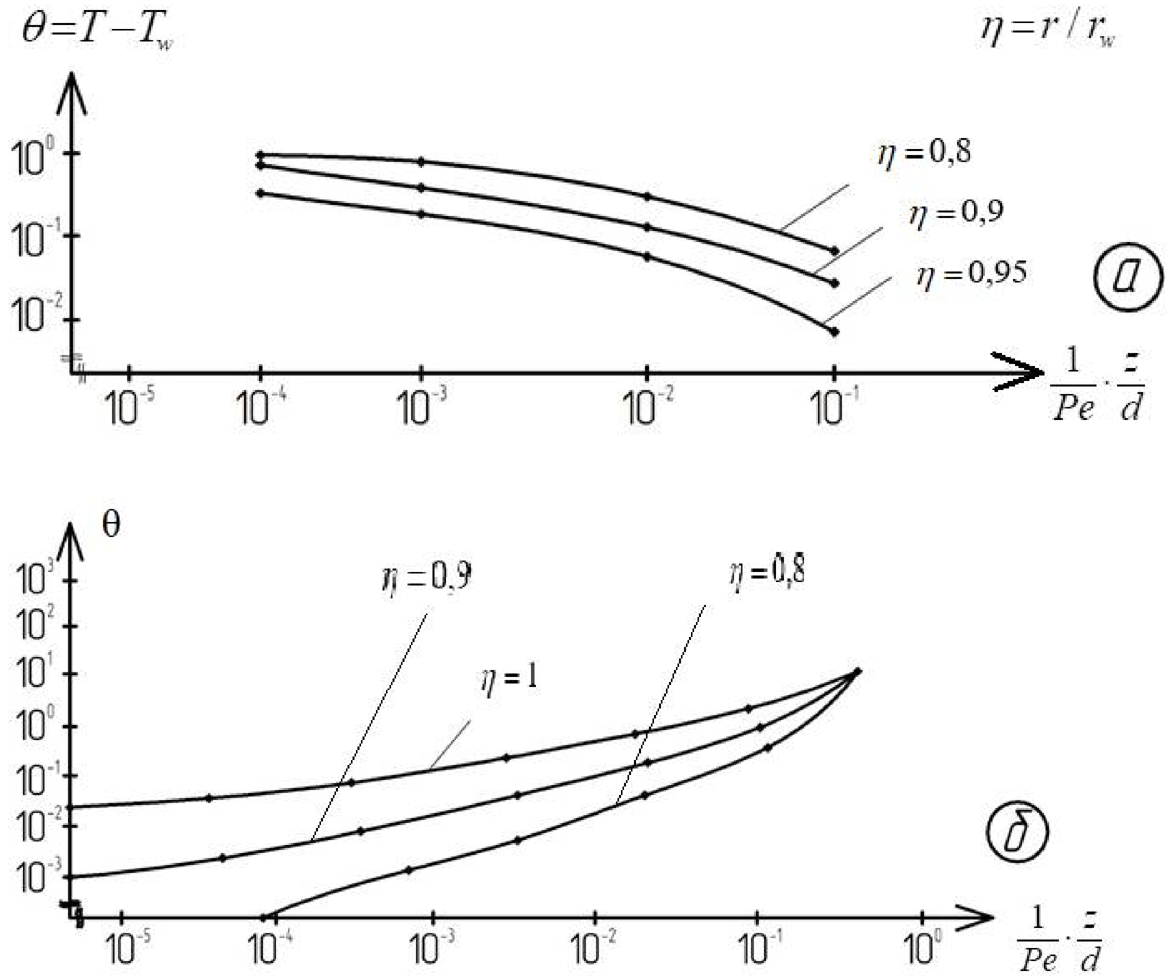

Рис. 1. Результати розрахунку температурного поля при m = 2, α = 0,5:

а - T_w=const; б - q_w=const; криві – результати аналітичного розв'язку [6, с.163], точки – результати чисельного розрахунку на ПЕОМ даної роботи.

Оцінюємо далі значення *Bi*, за якою задача з граничними умовами третього роду може бути зведена до задачі з граничними умовами першого роду.

У роботах [9, с. 332; 5, с.946] показано, що для ньютонівських рідин при *Bi* ≥40 різниця у параметрах теплообміну несуттєва. Аналіз отриманих чисельних результатів на ПЕОМ показує, що й для неньютонівських рідин вже при *Bi* = 40 різниця у середній температурі рідини $\bar{\theta}$ та числах *Nu* знаходиться у межах точності чисельних розрахунків, хоча певні відмінності у значеннях $\overline{\theta_w}$ (рис. 2) за малих довжин все ж мають місце; вони зникають при *Bi* ≈ 60…70. Дані рис. 2 відносяться до *m* = 2 і *α* = *0,5*, при інших значеннях *m* та *α* зміни незначні:

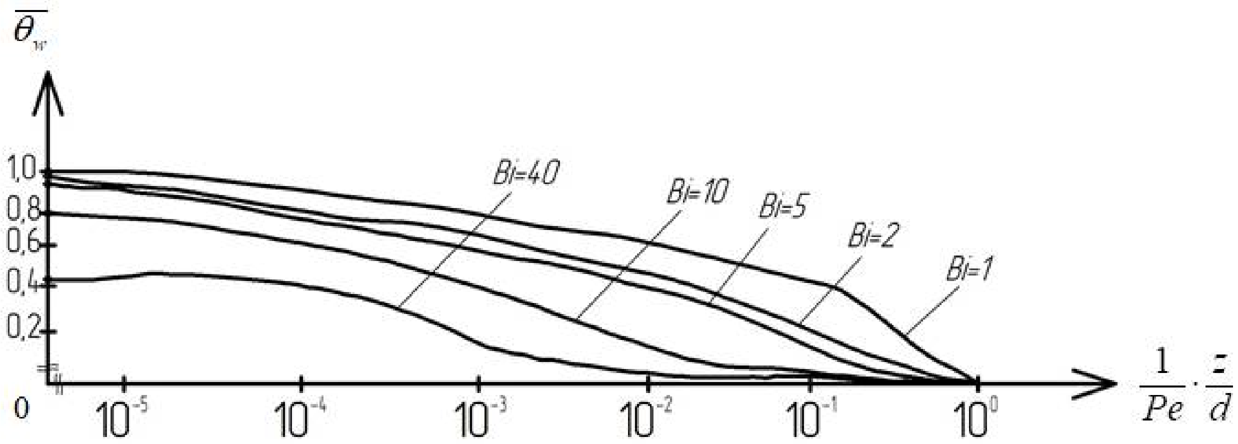

Рис. 2. Зміни безрозмірної температури внутрішньої стінки труби ($\overline{\theta_w}$) по її довжині при *m* = 2, *α* = *0,5,* $Br_0^* = 0$ (Br_0^*- число Брюна [1, с.94]), $\theta = (T - T_w)/T_w$/.

Висновки. Аналітичним шляхом отримані місцеві значення Nu_k (загальне число Нуссельта), яке залежить від критерію Біо (*Bi*), для розв'язування задачі про теплообмін у трубі круглого перерізу за граничних умов третього роду. Розраховане температурне поле труби круглого перерізу чисельними методами й оцінена точність таких розрахунків у порівнянні з аналітичними підходами до розв'язку задач теплообміну при граничних умовах першого та третього роду. Проведена чисельна оцінка значення *Bi*, за якого задача з граничними умовами третього роду може бути зведена до задачі з граничними умовами першого роду. Результати проведеного дослідження можуть бути у подальшому використані для вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку задач теплообміну у теплообмінних пристроях (апаратах).

Література:

1. Лыков А.В. (1976). Сопряжённые задачи конвективного теплообмена. Проблемы тепло- и массопереноса. Минск. Наука и техника, с. 83-98.
2. Шишлянников В.В., Треножкин В.И., Торнер Р.В., Тябин Н.В. (1979). Сопряжённый теплообмен при течении неньютоновской жидкости в круглой трубе. Реол. свойства полимер. систем. Свердловск, с. 29-35.
3. Shul`man Z.P., Khusid B.M. (1981). Conjugated convective heat transfer problems for viscoplastic fluids in plane-parallel channels. Int. I. Heat and Mass Transfer. V.24, №6. p. 1045-1050.
4. Дорфман А.Ш. (1982). Теплообмен при обтекании неизотерических тел. М. Машиностроение, 192с.
5. Javeri V. (1976). Simultaneous development of the laminar velocity and temperature fields in a circular duct for the temperature boundary condition of the third kind. Int. J. Heat and Mass Transfer. V.19, №8. p. 943-949.
6. Фройштетер Г. Б., Данилевич С. Ю., Радионова Н.В. (1990). Течение и теплообмен неньютоновских жидкостей в трубах. Киев: Наукова думка. 216с.
7. Фройштетер Г.Б., Радионова Н.В., Аверина Т.В. (1984). Теплообмен нелинейно-вязкопластичных жидкостей в трубах при граничных условиях третьего рода. Реология, процессы и аппараты химической технологии. Волгоград. с. 96-106.
8. Аверина Т.В., Радионова Н.В., Фройштетер Г.Б., Адамчук Г.П. (1985). Расчёт теплообмена при течении пластичных смазок в трубах для граничных условий третьего рода. Нефтепереработка и нефтехимия. Киев. Наукова думка. Вып. 28. с. 73-77.

References:

1. Lykov A.V. (1976). Sopryazhonnyye zadachi konvektivnogo teploobmena. Problemy teplo- i massoperenosa. [Conjugate problems of convective heat transfer. Heat and mass transfer problems.]. Minsk: Nauka i tekhnika [Minsk: Science and Technology]. s. 83-98 [in Russian].
2. Shishlyannikov V.V., Trenozhkin V.I., Torner R.V., Tyabin N.V. (1979). Sopryazhonnyy teploobmen pri techenii nen'yutonovskoy zhidkosti v krugloy trube[Conjugate heat transfer in the flow of a non-Newtonian fluid in a round tube.]. Reol. svoystva polimer. Sistem[Rheol. polymer proper. systems.]. Sverdlovsk. s. 29-35 [in Russian].
3. Shul`man Z.P., Khusid B.M. (1981). Conjugated convective heat transfer problems for viscoplastic fluids in plane-parallel channels. Int. I. Heat and Mass Transfer. V.24, №6. p. 1045-1050.
4. Dorfman A.SH. (1982). Teploobmen pri obtekanii neizotericheskikh tel [Heat transfer in the flow around non-isteric bodies]. M. Mashinostroyeniye [M. Mechanical Engineering]. 192s.
5. Javeri V. (1976). Simultaneous development of the laminar velocity and temperature fields in a circular duct for the temperature boundary condition of the third kind. Int. J. Heat and Mass Transfer. V.19, №8. p. 943-949.
6. Froyshteter G. B., Danilevich S. YU., Radionova N.V. (1990). Techeniye i teploobmen nen'yutonovskikh zhidkostey v trubakh [Flow and heat transfer of non-Newtonian fluids in pipes.]. Kyiv. Naukova dumka [Scientific thought]. 216s.
7. Froyshteter G.B., Radionova N.V., Averina T.V. (1984). Teploobmen nelineyno-vyazkoplastichnykh zhidkostey v trubakh pri granichnykh usloviyakh tret'yego roda [Heat transfer of nonlinear viscoplastic fluids in pipes under boundary conditions of the third kind.]. Reologiya, protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii [Rheology, processes and apparatus of chemical technology]. Volgograd. s. 96-106.

8. Averina T.V., Radionova N.V., Froyshteter G.B., Adamchuk G.P. (1985). Raschot teploobmena pri techenii plastichnykh smazok v trubakh dlya granichnykh usloviy tret'yego roda. Neftepererabotka i neftekhimiya [Calculation of heat transfer during the flow of grease in pipes for boundary conditions of the third kind. Oil refining and petrochemistry.]. Kyiv: Naukova dumka [Scientific thought]. Vyp. 28. s. 73-77.

Citation: Y. Chovniuk, A. Moskvitina (2020). NUMERICAL AND ANALYTICAL SOLUTION OF THE HEAT EXCHANGE PROBLEM. New York. TK Meganom LLC. Innovative Solutions in Modern Science. 8(44). doi: 10.26886/2414-634X.8(44)2020.2