

УДК: 631.33.024

**МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ  
ПІДВІСКИ СОШНИКА: ТЕОРЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ****доктор технічних наук, Гевко Б.М.**Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя,  
Україна, Тернопіль**кандидат технічних наук, Павельчук Ю.Ф.**Подільський державний аграрно-технічний університет, Україна,  
Кам'янець-Подільський

*Досліджені коливань несучого патрубка сошника зернової сівалки вздовж котрого переміщається насіння зернових культур і впливна них основних фізико-механічних та геометричних характеристик, способу закріплення та відносної швидкості руху зерна вздовж патрубка на амплітудно-частотну характеристику його коливань. Залишається відкритою проблема аналітичного дослідження динамічних процесів систем, які характеризуються поздовжнім рухом з урахуванням їх згинальної жорсткості. Для вирішення проблеми пропонується підхід, який враховує, що кількість відносного руху зерна у патрубку є малою величиною порівняно з рухом патрубка при його згинальних коливаннях, а швидкість суцільного потоку зерна у патрубку змінюється повільно. Для вирішення поставленої задачі у статті використано принцип одночастотності коливань у нелінійних системах із зосередженими масами та розподіленими параметрами та асимптотичні методи нелінійної механіки. Дослідження коливань механічної системи патрубків – рухомий потік зерна звелось до побудови та аналізу розв'язку диференційного рівняння за крайових умов.*

*Ключові слова: сошник, патрубок, зерно, коливання, диференціальне рівняння, крайові умови.*

*Doctor in Technical sciences, B.M. Hevko, Ph.D. in Technical sciences, Y.F. Pavelchuk Mechanical design vibrations of shovel pipe - traffic flow grain: theoretical analysis / Ternopil National Technical University Ivan Pul'uj, Ukraine, Ternopil; Podolsky State Agricultural and Technical University, Ukraine, Kam'yanets-Podolsky*

*Researched fluctuations carrier pipe coulter seed drill which moves along the seed crops and the impact on them basic physico-mechanical and geometric characteristics, method consolidation and the relative speed of the grain along the pipe to frequency response of its fluctuations. It remains open problem analytical study of dynamic processes, characterized by longitudinal movement of the light bending rigidity. To solve the problem, an approach that takes into account, the amount of relative movement of grain in the pipe is relatively small quantity with the movement of the pipe*

*during its bending vibrations and continuous speed grain flow tube changes slowly. To solve sex problem in principle odnochastotnosti used in nonlinear vibrations systems with concentrated masses and distributed parameters and asymptotic methods of nonlinear mechanics. The study of mechanical vibrations pipe system - moving stream of grain was reduced to the construction and analysis solution of differential equation for the boundary conditions.*

*Keywords: drill, pipe, grain, variations, differential equations, boundary conditions.*

**Вступ.** Дослідження коливань патрубків вздовж котрого переміщується насіння зернових культур з метою визначення впливу: основних фізико-механічних та геометричних характеристик, способу закріплення та відносної швидкості руху зерна вздовж патрубків на амплітудно-частотну характеристику його коливань. Вказані величини визначають подачу зерна у під сошниковий простір сівалок при без рядковому висіві насіння зернових культур. Саме величина вектора швидкості зерна та кут нахилу останньої до площини сошника є визначальними чинниками руху насіння у під сошниковому просторі.

Для цього у статті отримано математичну модель динаміки системи патрубків-зерно. Математична модель системи патрубків-зерно відповідає фізичному процесу згинальних коливань патрубків вздовж котрого рухається зерно. Вона враховує нелінійно-пружні властивості патрубків при його згинальних коливаннях та рух вздовж нього зерна. Потік зерна у патрубку моделюється нестисливим суцільним середовищем, яке рухається відносно патрубків. Така нелінійна математична модель еквівалентна одновимірній системі із розподіленими параметрами, до того ж вона враховує поздовжню складову швидкості руху розподіленої маси (зерна) вздовж пружного тіла (патрубків). Одночасно із наведеними чинниками пов'язані основні труднощі дослідження динаміки механічної системи патрубків – потік рухомого зерна. Адже: по-перше, навіть у межах лінійної теорії коливань не вдається пояснити цілу низку явищ, які мають місце у подібного типу механічних систем; по-друге, урахування руху зерна вздовж патрубків приводить до якісно нової математичної моделі, що відповідає динаміці досліджуваної системи.

Математичний апарат дослідження нелінійних моделей систем розподіленими параметрами розроблений відносно повно тільки для так званих квазілінійних аналогів [1,2] обмеженої довжини, частково для систем із степеневою нелінійністю та близьких до них. Для таких систем на основі загальних ідей методів збурень [3] чи їхніх модифікацій [4,5] вдається побудувати асимптотичні наближення, котрі достатньо адекватні динамічному процесу. Що стосується суцільних середовищ, які характеризуються поздовжнім рухом (до таких систем

крім патрубку із потоком рухомого зерна можна віднести канатні витяги, гнучкі робочі елементи систем приводу й транспортування та ін.), то вони залишаються мало дослідженими в першу чергу через відсутність апарату аналізу їх навіть лінійних математичних моделей. Однак, їх широке застосування у різних галузях народного господарства та техніки, стало причиною того, що в останні десятиліття набули розвитку різні підходи (чисельні та аналітичні [6]) до дослідження лінійних та нелінійних моделей вказаних систем. Для більшості випадків моделі поздовжньо-рухомих систем (одновимірних чи двовимірних) розглядались за умови, що їхньою згинальною жорсткістю можна знехтувати [7]. Таке обґрунтоване, для певного класу динамічних систем, спрощення, дозволило поширити на випадок поздовжніх чи поперечних їх коливань основні ідеї хвильової теорії руху. Однак для поздовжньо-рухомих систем значної згинальної жорсткості спрощення фізичних, а значить і відповідних їм математичних моделей призводить до певних неточностей визначення основних параметрів, котрі характеризують процес в цілому. Урахування ж згинальної жорсткості у поздовжньо-рухомих середовищах призводить до побудови якісно нових математичних моделей їх динаміки. Знаходження ж відповідних їм аналітичних розв'язків, які б давали можливість всебічно проаналізувати процес, є складною математичною задачею. Це означає, що проблема аналітичного дослідження динамічних процесів систем, які характеризуються поздовжнім рухом із урахуванням їх згинальної жорсткості залишається відкритою.

**Формулювання мети статті та завдань.** Для часткового вирішення проблеми у роботі пропонується підхід, основна ідея якого полягає у наступному: кількість відносного руху зерна у патрубку є малою величиною у порівнянні із кількістю руху патрубка при його згинальних коливаннях; відносна відцентрова сила інерції, яка діє на патрубок зі сторони зерна і зумовлена криволінійною його формою при коливаннях є малою величиною у порівнянні із перерізуючою силою; швидкість суцільного потоку зерна у патрубку змінюється повільно.

Такий, дещо спрощений, підхід для багатьох випадків є фізично обґрунтованим і одночасно одним із можливих на сьогоднішній день способів аналітичного дослідження розглядуваного класу динамічних систем. Зауважимо, аналітичні дослідження динамічних процесів поздовжньо-рухомих систем, в основу котрих покладено поєднання методів Бубнова – Гальоркіна [8] та асимптотичних методів нелінійної механіки [4] є, на наш погляд, менш точним ніж запропонований у роботі підхід. Це підтверджується хоча б тим, що навіть для систем малої згинальної жорсткості із їх допомогою не вдається пояснити низку особливостей характерних для поздовжньо-рухомих систем [9].

Таким чином, для вирішення поставленої задачі у статі використано: а) принцип одночастотності коливань у нелінійних системах із зосередженими масами та розподіленими параметрами; б) асимптотичні методи нелінійної механіки [4], які адаптовані для розв'язання нових типів крайових задач.

Наведене у сукупності дозволяє отримати двопаараметричну множину розв'язків, яка описує закони зміни визначальних параметрів фізичного процесу як функції геометричних, фізико-механічних параметрів патрубку, швидкості руху зерна, його погонної маси, а також дії зовнішніх чинників, які пов'язані із рухом сівалки.

**Виклад основного матеріалу статті.** Для отримання диференціального рівняння, яке описує коливальний процес патрубка вздовж котрого рухається зерно будемо вважати, що: а) площа поперечного перерізу патрубка, маса його одиниці довжини та жорсткість є незмінними величинами; б) матеріал його задовольняє близькому до лінійного закону пружності; в) вздовж патрубка рухається зі сталою швидкістю зерно, яке моделюємо суцільним середовищем “нульової жорсткості”; г) нормальні перерізи патрубка знаходяться завжди перпендикулярними до його нейтральної осі, тобто депланація поперечного перерізу відсутня; д) відхилення окремих точок патрубка відбуваються у напрямку перпендикулярному середньої лінії патрубка, тобто переміщенням точок паралельно до нейтральної осі недеформованого патрубка нехтуємо; е) відхилення точок осі патрубка довільного нормального перерізу відбуваються в одній площині (“в площині коливань”).

За вказаних припущень відхилення точок осі патрубка при поперечних його коливаннях однозначно визначаються однією функцією двох змінних – координати  $x$  та часу  $t$ . Вважатимемо, що  $u = u(x, t)$  - відхилення нейтральної осі патрубка з координатою  $x$  в довільний момент часу, а розподіл же сил, які діють на умовно виділений елемент деформованого патрубка довжиною  $dx$  вказані на рис.1.

Позначимо:

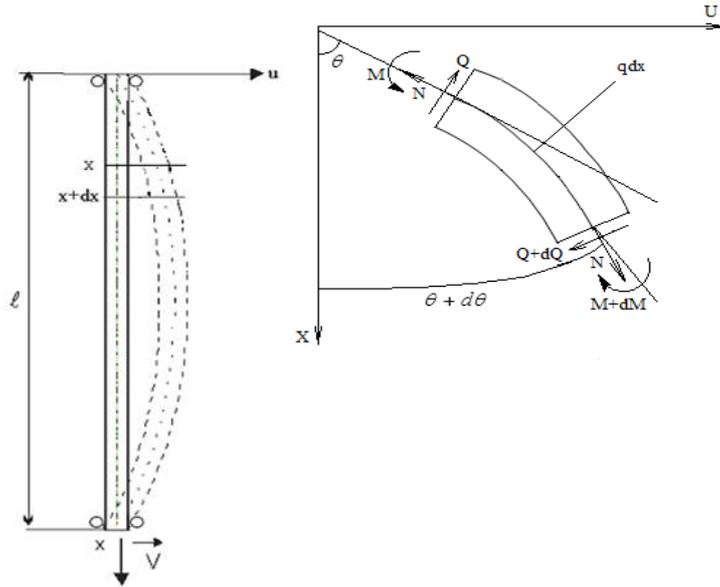
$m$  - масу одиниці довжини патрубка;

$m_1$  - масу одиниці довжини умовної матеріальної лінії – потоку зерна, яке рухається вздовж патрубка;

$E$  - модуль пружності матеріалу патрубка;

$I$  - момент інерції поперечного перерізу патрубка відносно осі, яка співпадає із нейтральною віссю у недеформованому положенні патрубка (вказана вісь є перпендикулярною до площини коливань);

$M$  - згинаючий момент перерізу із координатою  $x$  ;



**Рис. 1. Розподіл сил, які діють на умовно виділений елемент патрубка**

$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$  - згинаючий момент перерізу із координатою  $x+dx$ ;

$Q$  - перерізує зусилля у перерізі із координатою  $x$  ;

$Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx$  - перерізує зусилля у перерізі к координатою  $x+dx$ ;

$\theta_1$  - кут нахилу, який утворює із віссю OX дотична до нейтральної лінії нормального перерізу із координатою  $x$  ;

$\theta_2$  - кут нахилу, який утворює із віссю OX дотична до нейтральної лінії нормального перерізу із координатою  $x+dx$ ;

$dq = q(x, t)dx$  - складова рівнодійної зовнішніх сил у площині OXZ, які діють на умовно виділений елемент патрубка, а  $q(x, t)$  їх інтенсивність.

Тоді проекція пришвидшення центру виділеного елемента на вісь OZ

рівна  $\frac{d^2 u}{dt^2}$ , тобто  $a_z = \frac{d^2 u}{dt^2}$ . Приймаючи до уваги, що для малих коливань

розглядуваного елемента патрубка  $\frac{\partial u}{\partial x}$  і  $\theta_2$  будуть також малими

величинами і вони зв'язані співвідношенням [8]  $\sin \theta_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,

$\sin \theta_2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$ . До того ж, урахувавши зв'язок міжперерізуєчою силою

$Q$  та згинальним моментом  $M: Q = \frac{dM}{dx}$ , рівняння "динамічної

рівноваги" виділеного елемента патрубка із зерном набуває вигляду

$$-N \sin \theta_1 - dq_{in} - \frac{\partial Q}{\partial x} dx + N \sin \theta_2 + q(x, t) dx = 0. \quad (1)$$

Для патрубку вздовж котрого рухається зерно проекція сили інерції  $dq_{in}$  визначається співвідношенням

$$dq_{in} = m_1 \frac{d^2 u(x, t)}{dt^2} dx + m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx. \quad (2)$$

У останньому співвідношенні символ  $\frac{d^2}{dt^2}$  повної похідної за часом відповідної функції. Нехай пружні властивості матеріалу патрубку задовольняють нелінійному технічному закону пружності:

$$\sigma = E(\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_1^3),$$

де  $\varepsilon_1 = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$  - відносне видовження патрубку, а параметр  $\mu$  характеризує відхилення його пружних властивостей від лінійного закону.

Тут і нижче будемо вважати його малим у порівнянні із модулем пружності  $E$  Приймаючи до уваги, що

$$\frac{du(x, t)}{dt} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2 u(x, t)}{dt^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t \partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3)$$

для випадку сталої швидкості руху зерна вздовж патрубку ( $\frac{dx}{dt} = V = const$ ) рівняння (1) набуває вигляду

$$(m + m_1) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + 2m_1 V \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t \partial x} - (N - V^2) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right)^3 \right) \right) \right] = q(u, x, t), \quad (4)$$

де  $EI$  - жорсткість на згин патрубку.

Нехтуючи стискаючою силою, отримане вище диференціальне рівняння подамо у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{m_1}{m + m_1} \left( 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} V^2 \right) + \frac{EI}{m + m_1} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\mu \frac{EI}{m + m_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^3 + \frac{m_1}{m + m_1} q(u, x, t).$$

Знайти аналітичний розв'язок навіть відповідної лінійної моделі наведеного вище рівняння (без урахування правої частини) відомими класичними методами [3] не вдається. Тому нижче досліджуватиме динамічний процес системи патрубків рухомий потік зерна за малої

швидкості руху останнього. Це дозволяє запропоновану модель динамічного процесу представити у загальному вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\mu F\left(u, \theta, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) \quad (5)$$

$F\left(u, \theta, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$  – аналітична  $2\pi$  - періодична до  $\nu t = \theta$  функція:

$$\mu F\left(u, \theta, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) = -\mu \frac{EI}{m+m_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3 - \frac{m_1}{m+m_1} \left(2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} V^2\right) + \frac{m_1}{m+m_1} q(u, x, t).$$

Її можна представити у вигляді:

$$F\left(u, \theta, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) = \sum_{n=-N}^N e^{in\nu t} F_n\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right), \quad (6)$$

де коефіцієнти  $F_n\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$  в кінцевій сумі правої частини останньої

залежності є деякими поліномами відносно до  $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ .

Для рівняння (5) будемо розглядати крайові умови, які відповідають шарнірному закріпленню кінців патрубку [3], тобто

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)|_{x=0} = 0. \quad (7)$$

Таким чином, дослідження коливань механічної системи патрубків – рухомий потік зерна звелось до побудови та аналізу розв'язку рівняння (5) за крайових умов (7).

**Висновки.** Динамічний процес патрубка суттєво впливає на величину кута входження потоку зерна підсошниковий простір, а значить на якість безрядкового висіву зерна. Основними визначальними параметрами динаміки патрубка є амплітуда та частота нелінійних його коливань. Закони зміни вказаних параметрів визначаються геометричними характеристиками патрубка, фізико-механічними властивостями його матеріалу, швидкістю руху зерна у ньому, зовнішніми чинниками та інше.

### **Література:**

1. Андрухів А.І. Методика дослідження нелінійних згинних коливань гнучких елементів систем приводу / Андрухів А.І., Сокіл М.Б. // Вісник НУ "ЛП" Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. Львів, 2012, № 730. - С. 3-9
2. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Наука, 1965. – 560 с.
3. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем / Блэкьер О. [пер. с англ. Э. С. Воронина и Ю.А. Янайта. Под ред. Р.В. Хохлова]. – М.: Мир, 1969. – 400 с.

4. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Боголюбов Николай Николаевич, Митропольский Юрий Алексеевич. – М.: Наука, 1974. – 501 с.
5. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем / Блэкьер О. – М.: Наука, 1969. – 275 с.
6. Волкова В.Є. Нелінійні коливання гнучких стержнів, попередньо напружених затяжками: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.23.17 / В.Є. Волкова. – Дніпропетровськ, 1999. – 18 с.
7. Доценко П.Д. Колебание и устойчивость движущейся полосы / Доценко П.Д. // Машиноведение. – 1969. – № 5. – С. 18–24.
8. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.
9. Тарме М. Свободные периодические нелинейные колебания полосы, движущейся в осевом направлении / Тарме М., Моут Л. – В кн. тр. Американского общества инженеров-механиков. Прикладная механика. – М.: Мир, 1969. – 36. – № 1. – С.87–98.
10. Пат. на корисну модель № 101973 У. Україна, МПК А01С 7/20(2006.01). Сошник / Гевко Б. М., Павельчук Ю.Ф., Жалоба В. М. (Україна). - № и 2015 03400; Заяв. 10.04.2015 р. Опубліковано 12.10.2015. Бюл. № 19.
11. Б.М. Гевко, Ю.Ф. Павельчук. Дослідження процесу розподілу насіння зернових культур при підґрунтового-розкидного способі сівби: теоретичний аналіз / Збірник наукових праць: випуск 24. Частина 2. Технічні науки. / Подільський державний аграрно-технічний університет; за редакцією доктора економічних наук, професора, Заслуженого працівника сільського господарства України, ректора університету (голова) В.В. Іванишина. - Кам'янець-Подільський: Подільський державний аграрно-технічний університет, 2016. - 286 с. - с 25-32.

**References:**

1. Andruhiv A.I. Metodyka doslidzhennya neliniynykh zgyunnykh kolyvan gnuchkykh 0elementiv system pryvodu. / Andruhiv A.I. Sokil M.V. // Visnyk NU ‘ LP ‘ Dynamika, mitsnist ta proektuvannya mashyn I prykladiv. Lviv. 2012. № 730. - s. 3-9.
2. Babakov I.M. Teoriya kolebaniy / I.M. Babakov, - M. Nauka. 1965. - 560 s.
3. Blakier O. Analiz nelineynykh sistem / Blakier O. /per. S angl. E.S.Voronina. Y.A. Yanaita. Pod red. P.V. Khohlova /. -M. Mir. 1969.- 400 s.
4. Bogolyubov N.N. Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy/ Bogolyubov Nikolay Nikolayevich, Mitropolskiy Yuriy Alekseevich. - M. Nauka. 1974. -501 s.

5. Blakier O. *Analiz nelineinykh sistem* / Blakier O. - M.; Nauka. 1969. - 275 s.
6. Volkova V.E. - *Neliniyni kolyvannya gnuchkykh sterzhniv, poperednyo napruzhenykh zatyazhkamy; avtoref. Dys, na zdobuttya nayk, stupenya kand. Tekhn, nauk; spets. 05.23.17 /V.E. Volkova.* - Dnipropetrovsk. 1999 – 18 s.
7. Datsenko P.D. *Kolebaniya I ustoichivost dvizhushcheisya polosy.* / Datsenko P.D. - *Mashinovedenie.* - 1969 - № 5. - s. 18 – 24.
8. Koshlyakov N.S. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* / Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. - *Vysshaya shkola.* 1970. - 710 s.
9. Tarme M. *Svobodnye periodicheskie nelineinye kolebaniya polosy dvizhushcheisya v osnovnom napravlenii* / Tarme M.; Mout L. - V. kn. t. *Americanskogo obshchestva inzhenerov - mekhanikov. Prikladnaya mekhanika.* M.; Mir. 1969. - 36,-№ 1. -s. 87- 98.
10. Pat. Na korysnu model № 101973 U. Ukraina. MPK AOIS 7/20/2006.01 / Soshnyk / Gevko B.M. , Pavelchuk Y.F., Zhaloba V.M. / Ukraina. № 2015 03400; Zayav. 10.04.2015. Opublikovano 12.10.2015. Byul, № 19.
11. B.M. Gevko, Y.F. Pavelchuk *Doslidzhennya protsesu rozpodilu nasinnya zernovykh kultur pry pidgruntovo-rozkydnomu sposobt sivby, teoretychnyi analiz* / *Zbirnyk naukovykh prats; vypusk 24, Chastyna 2. Tekhnichni nauky / Podilskiy derzhavnyi ahrarno-tekhnichnyi universytet za redaktsiyu doctora ekonomichnykh nauk, profesora, zasluhenogo pratsivnyka silskogo gospodarstva Ukrainy, rektora universytetu V.V. Ivanyshyna. Kamenets – Podolskiy. Podolskiy derzhavnyi ahrarno – tekhnichniy universytet.* 2016.- 286 s.- s. 25 -32.